Apellidos y nombre..

TEMAS 1, 2 Y 3. CONTROL. ÁLGEBRA DE MATRICES, DETERMINANTES Y SISTEMAS DE ECUACIONES

1. a) Halla el valor del siguiente determinante utilizando algunas propiedades para simplificarlo.

$$\begin{vmatrix} x+2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x+2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & x+2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x+2 \end{vmatrix}$$

b) Enuncia tres propiedades de los determinantes que hayas utilizado en este ejercicio o que podrías haber utilizado.

a) $\begin{vmatrix} x+5 & 1 & 1 & 1 \\ x+5 & x+2 & 1 & 1 \\ x+5 & 1 & x+2 & 1 \\ x+5 & 1 & 1 & x+2 \end{vmatrix} =$

$= (x+5)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x+2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & x+2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x+2 \end{vmatrix} =$

$= (x+5)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & x+1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x+1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x+1 \end{vmatrix} = (x+5)(x+1)^3$

b) 1ª) Sumar a una línea otra

2ª) Extraer escalar que multiplica a una línea

3ª) Determinante de matriz triangular es producto de diagonal.

Nota.- En las cuestiones de teoría es importante usar el lenguaje simbólico; es decir, con letras.

***Apellidos y nombre*...**

2. a) Sistemas equivalentes. Propiedades que me dan sistemas lineales equivalentes.

b) Resuelve aplicando el método de Gauss: $\begin{cases} x+2y+3z=0 \\ -x+y=0 \\ x+3y+4z=0 \\ x+y+z=1 \end{cases}$

c) Escribe el sistema anterior en forma matricial.

a) Sistemas equivalentes son los que tienen la misma solución.

Me dan sistemas equivalentes:

1) Cambio de orden de ecuaciones
2) Multiplicar una ecuación por escalar $\neq 0$.
3) Sumar a una ecuación otra.

b)

$$\begin{cases} x+2y+3z=0 \\ -x+y=0 \quad (2^a+1^a) \\ x+3y+4z=0 \quad (3^a-1^a) \\ x+y+z=1 \quad (4^a-1^a) \end{cases} \quad \begin{cases} x+2y+3z=0 \\ 3y+3z=0 \\ -y-z=0 \\ -y-2z=1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+2y+3z=0 \\ y+z=0 \\ -y-z=0 \quad (2^a+3^a) \\ -y-2z=1 \quad (4^a+2^a) \end{cases} \quad \begin{cases} x+2y+3z=0 \\ y+z=0 \\ 0=0 \\ z=-1 \end{cases}$$

$\boxed{z=-1}$; $y-1=0$; $\boxed{y=1}$; $x+2\cdot1+3\cdot(-1)=0$; $\boxed{x=1}$

c)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Nota.- En las cuestiones de teoría es importante usar el lenguaje simbólico; es decir, con letras.

Apellidos y nombre...

3. a) Enuncia las propiedades de la suma de matrices y del producto por escalares de matrices.

b) Resuelve la siguiente ecuación matricial: *X · A = B – C, siendo*

$$A=\begin{pmatrix}5&2\\3&1\end{pmatrix};\ B=\begin{pmatrix}2&1\\3&-1\end{pmatrix};\ C=\begin{pmatrix}1&-1\\1&2\end{pmatrix}$$

Sol:

a) Sean $A, B, C \in M_{n\times m}$ y $r, s \in \mathbb{R}$

Suma:

a) $A+B=B+A$. Conmutativa

b) $(A+B)+C=A+(B+C)$. Asociativa

c) $A+0=A$. El. neutro. $0=(a_{ij})$ tal que $a_{ij}=0\ \forall i,j$

d) $\forall A, \exists -A \,/\, A+(-A)=0$

si $A=(a_{ij})$ $-A=(-a_{ij})$

Producto por escalares

a) $r(s\cdot A)=(r\cdot s)\cdot A$

b) $(r+s)\cdot A=rA+sA$

c) $r\cdot(A+B)=r\cdot A+rB$

d) $1\cdot A=A$.

b) $X\cdot A=B-C$; $X=(B-C)\cdot A^{-1}$

A^{-1}: $A_{11}=1$; $A_{12}=-3$

$A_{21}=-2$; $A_{22}=5$

$|A|=\begin{vmatrix}5&2\\3&1\end{vmatrix}=-1$

$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\,Adj(A)^t=$

$=\frac{1}{-1}\begin{pmatrix}1&-2\\-3&5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&2\\3&-5\end{pmatrix}$

$$X=\left[\begin{pmatrix}2&1\\3&-1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&-1\\1&2\end{pmatrix}\right]\cdot\begin{pmatrix}-1&2\\3&-5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2\\2&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&2\\3&-5\end{pmatrix}=$$

$$=\boxed{\begin{pmatrix}5&-8\\-11&19\end{pmatrix}}$$

Nota.- En las cuestiones de teoría es importante usar el lenguaje simbólico; es decir, con letras.

Apellidos y nombre..

4. a) Sabiendo que: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ x & y & z \end{vmatrix} = 5$, calcula, sin desarrollarlo, el valor del siguiente determinante: $\begin{vmatrix} 5 & 5 & 5 \\ 2x & 2y & 2z \\ a+2 & b+2 & c+2 \end{vmatrix}$

b) Calcula el valor de a para que $\begin{vmatrix} a & 1 & 0 & 1 \\ 1 & a & 0 & 1 \\ 0 & 1 & a & 1 \\ 1 & 0 & 1 & a \end{vmatrix} = 0$.

Sol:

a) $$\begin{vmatrix} 5 & 5 & 5 \\ 2x & 2y & 2z \\ a+2 & b+2 & c+2 \end{vmatrix} = 5\cdot 2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ a+2 & b+2 & c+2 \end{vmatrix} =$$

$$= 10\cdot\left[\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ a & b & c \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix}\right] = 10\cdot\left[-5+0\right] = \boxed{-50}$$

b) $$\begin{vmatrix} a & 1 & 0 & 1 \\ 1 & a & 0 & 1 \\ 0 & 1 & a & 1 \\ 1 & 0 & 1 & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+2 & 1 & 0 & 1 \\ a+2 & a & 0 & 1 \\ a+2 & 1 & a & 1 \\ a+2 & 0 & 1 & a \end{vmatrix} =$$

$(1^a+2^a+3^a+4^a)$

$$= (a+2)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & a & 0 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 0 & 1 & a \end{vmatrix} = (a+2)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & a-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & -1 & 1 & a-1 \end{vmatrix} = \begin{matrix} (2^a-1^a) \\ (3^a-1^a) \\ (4^a-1^a) \end{matrix}$$

$$= (a+2)\begin{vmatrix} a-1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ -1 & 1 & a-1 \end{vmatrix} = (a+2)(a-1)\cdot a\cdot(a-1) = 0$$

$$\boxed{a=-2\ ;\ a=1\ ;\ a=0}$$

Nota.- En las cuestiones de teoría es importante usar el lenguaje simbólico; es decir, con letras.

***Apellidos y nombre*..**

5. a) Enuncia el teorema de Rouché y la clasificación de los sistemas de ecuaciones. (2 puntos)

b) Discute en función del parámetro *b*, el sistema: $\left.\begin{array}{r} x+y=b \\ -2x-y+(b-1)z=-2 \\ bx+y-z=2 \end{array}\right\}$ (4 puntos)

c) Resuelve el sistema para b=1 aplicando la regla de Cramer. (4 puntos)

a) Un sistema de ecuaciones lineales es compatible $\Longleftrightarrow Rg(A)=Rg(A')$ siendo A matriz de los coeficientes y A' la matriz ampliada.

b) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & b \\ -2 & -1 & b-1 & -2 \\ b & 1 & -1 & 2 \end{array}\right)$ $\quad \overleftarrow{\ \ A\ \ }\!\!\rightarrow$, $\overleftarrow{\quad A' \quad}\!\!\rightarrow$

Rg A: $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & b-1 \\ b & 1 & -1 \end{vmatrix} = 1+b(b-1)-(b-1)-2 =$

$1+b^2-b-b+1-2 = b^2-2b=0$; $\boxed{b=0\ ;\ b=2}$

$b=0$;
$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right)$

Rg A':
$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -2+2+4=4\neq 0$

Rg A' = 3

$b=2$
$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 \\ -2 & -1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right)$

Rg A':
$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$ Rg A' = 2

b	Rg A	Rg A'	sistema
0	2	3	Incompatible
2	2	2	C. I.
Resto	3	3	C. D

Nota.- En las cuestiones de teoría es importante usar el lenguaje simbólico; es decir, con letras.

c)
$$\left.\begin{array}{l} x + y = 1 \\ -2x - y = -2 \\ x + y - z = 2 \end{array}\right\}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{+1-2}{+1-2} = \frac{-1}{-1} = 1$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}}{-1} = \frac{0}{-1} = 0$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}}{-1} = \frac{-2-2-2+1+2+4}{-1} = \frac{1}{-1} = -1$$

$$\boxed{x = 1 \ ; \ y = 0 \ ; \ z = -1}$$

Nota.- En las cuestiones de teoría es importante usar el lenguaje simbólico; es decir, con letras.